

## Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Geben Sie die Mengen

a)  $L_1 := \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} \mid \frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} \right\}$

b)  $L_2 := \{ x \in \mathbb{R} \mid |3x^2 - 8x - 7| \leq 4 \}$  *[Hinweis: Verwenden Sie (3.17).]*

mit geeigneten Intervallen an und skizzieren Sie diese auf der Zahlengeraden.

2. Es sei  $(K, +, \cdot, <)$  ein angeordneter Körper. Zeigen Sie für alle  $a, b \in K$ :

a)  $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ .

b)  $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ .

c)  $\max\{a, b\} - \min\{a, b\} = |a - b|$ .

3. Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

gegeben.

a) Sei  $y \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Menge  $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$ .

b) Bestimmen Sie die Menge  $B := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = y\}$

*In a) bestimmen Sie also das Urbild  $f^{-1}(\{y\})$ , und in b) die Wertemenge  $W_f = f(\mathbb{R})$ . Die Ergebnisse werden stets noch von den Zahlen  $a, b, c$  abhängen.*

4. Auf der Menge  $M = \{A, B, C, D\}$  wird eine Addition “+“ und eine Multiplikation “·“ über die Verknüpfungstafeln

|   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| + |  | A |  | B |  | C |  | D |  |
| A |  | C |  | D |  | A |  | B |  |
| B |  | D |  | A |  | B |  | C |  |
| C |  | A |  | B |  | C |  | D |  |
| D |  | B |  | C |  | D |  | A |  |

und

|   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| · |  | A |  | B |  | C |  | D |  |
| A |  | B |  | D |  | C |  | A |  |
| B |  | D |  | A |  | C |  | B |  |
| C |  | C |  | C |  | C |  | C |  |
| D |  | A |  | B |  | C |  | D |  |

definiert. Beweisen Sie, daß  $(M, +, \cdot)$  **kein** Körper ist!

*Hinweis: Wenn Sie mehr als ein paar Zeilen dafür schreiben müssen, sind Sie auf dem falschen Weg! Überprüfen Sie das Distributivgesetz!*